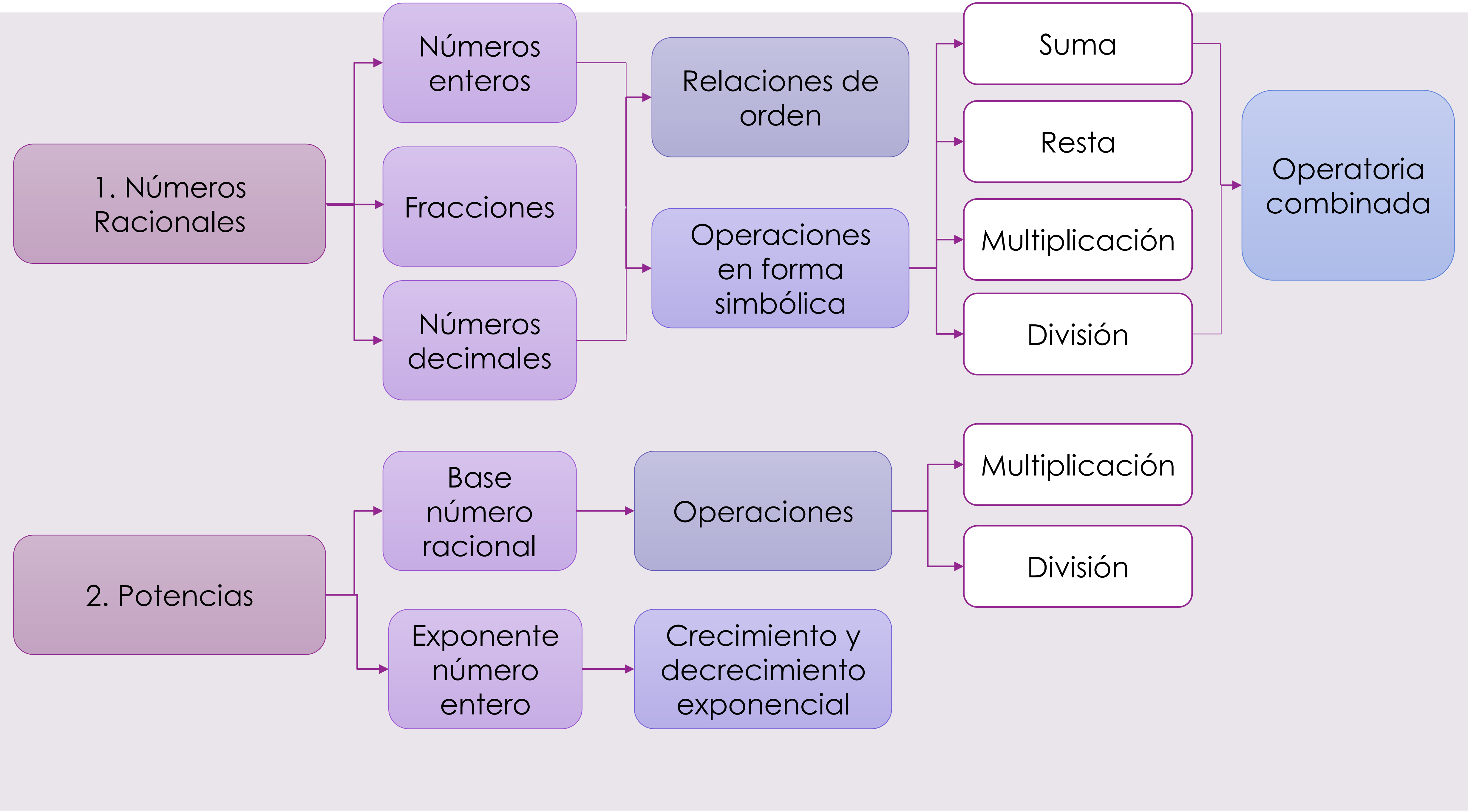
UNIDAD 1: NÚMEROS Y OPERACIONES

1° medio

Profesora Vanessa Castro Ramírez


1. Números Racionales
Números enteros
Fracciones
Números decimales
Relaciones de orden
Operaciones en forma simbólica
Suma
Resta
Multiplicación
División
Operatoria combinada
2. Potencias
Base número racional
Exponente número entero
Operaciones
Crecimiento y decrecimiento exponencial
Multiplicación
División

Recordemos…

- Los números naturales son los que utilizamos en la vida cotidiana para contar u ordenar.
- Los **números naturales** son **ilimitados**, si a un número natural le sumamos 1, obtenemos otro número natural.

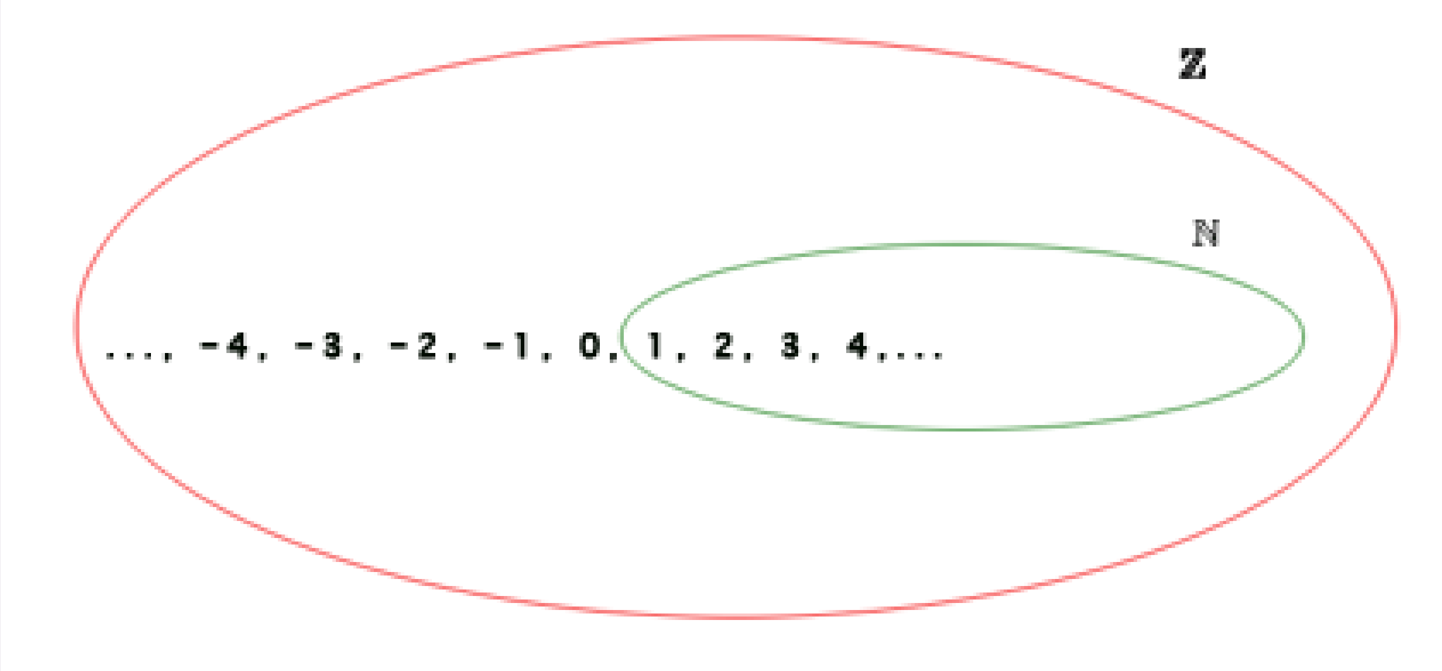
$\mathbb{N}$ Los elementos del conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5,\ldots\}$ se denominan **"Números Naturales".**

$\mathbb{N}_0$ Los **"Números Cardinales"** corresponden a la unión del conjunto de los números naturales con el cero. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5,\ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Con los números naturales no era posible realizar diferencias donde el minuendo era menor que el que el sustraendo, pero en la vida nos encontramos con operaciones de este tipo donde a un número menor hay que restarle uno mayor. La necesidad de representar el dinero adeudado, la temperatura bajo cero, profundidades con respecto al nivel del mar, etc. Las anteriores situaciones nos obligan a ampliar el concepto de números naturales, introduciendo un nuevo conjunto numérico llamado números enteros.

$\mathbb{Z}$ Los elementos del conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1, 0, 1, 2,\ldots\}$ se denominan **"Números Enteros"**.

◦ Dado que los enteros contienen los enteros positivos, se considera a los números naturales como un subconjunto de los enteros.



Resolvamos las siguientes divisiones…

15 : 3

9 : 2

4 : 3

Al analizar cada uno de los resultados obtenidos: ¿Los números pertenecen a algún conjunto que ya conocemos?

1. NÚMEROS RACIONALES

Números racionales: Definición

- Un **número racional** es todo **número** que puede representarse como el **cociente** de **dos enteros**, con denominador distinto de cero. Esto es:

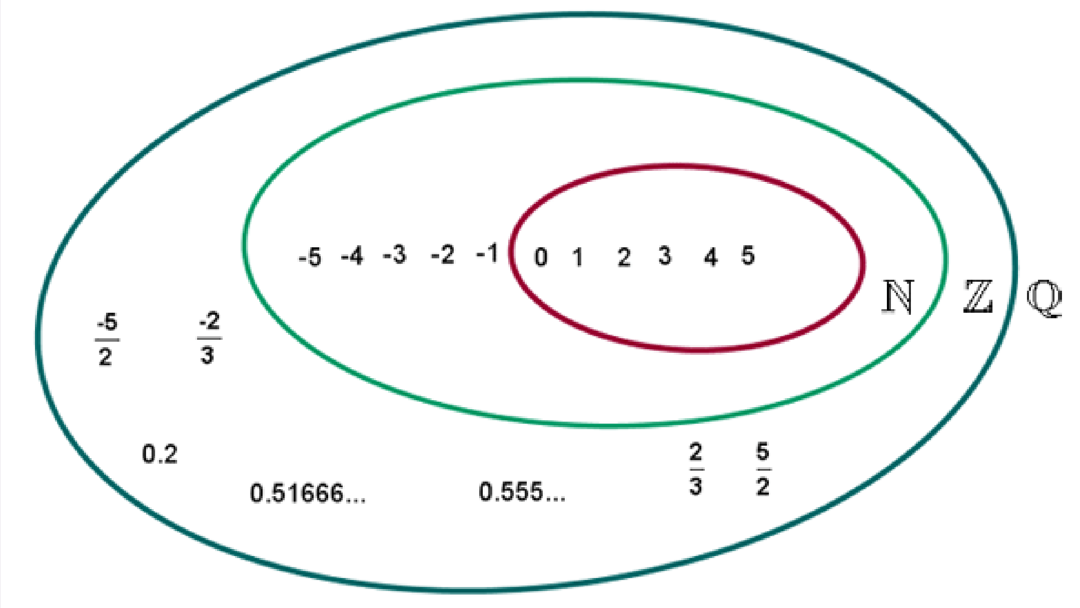
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;/\; a \in \mathbb{Z};\ b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0 \right\}$$

- Se denota por la letra $\mathbb{Q}$

Ejemplos.

- $0{,}35$ es un número decimal finito que se puede escribir como una fracción $0{,}35 = \frac{35}{100}$
- -2 es número entero se puede escribir como una fracción $-2 = -\frac{2}{1}$
- 0,3333… es un número decimal infinito que se puede escribir como una fracción $0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
- 0 es un número entero que se puede escribir como una fracción $0 = \frac{0}{1}$

- Se considera el conjunto de los números enteros un subconjunto de los números racionales. Así se amplia nuestro diagrama

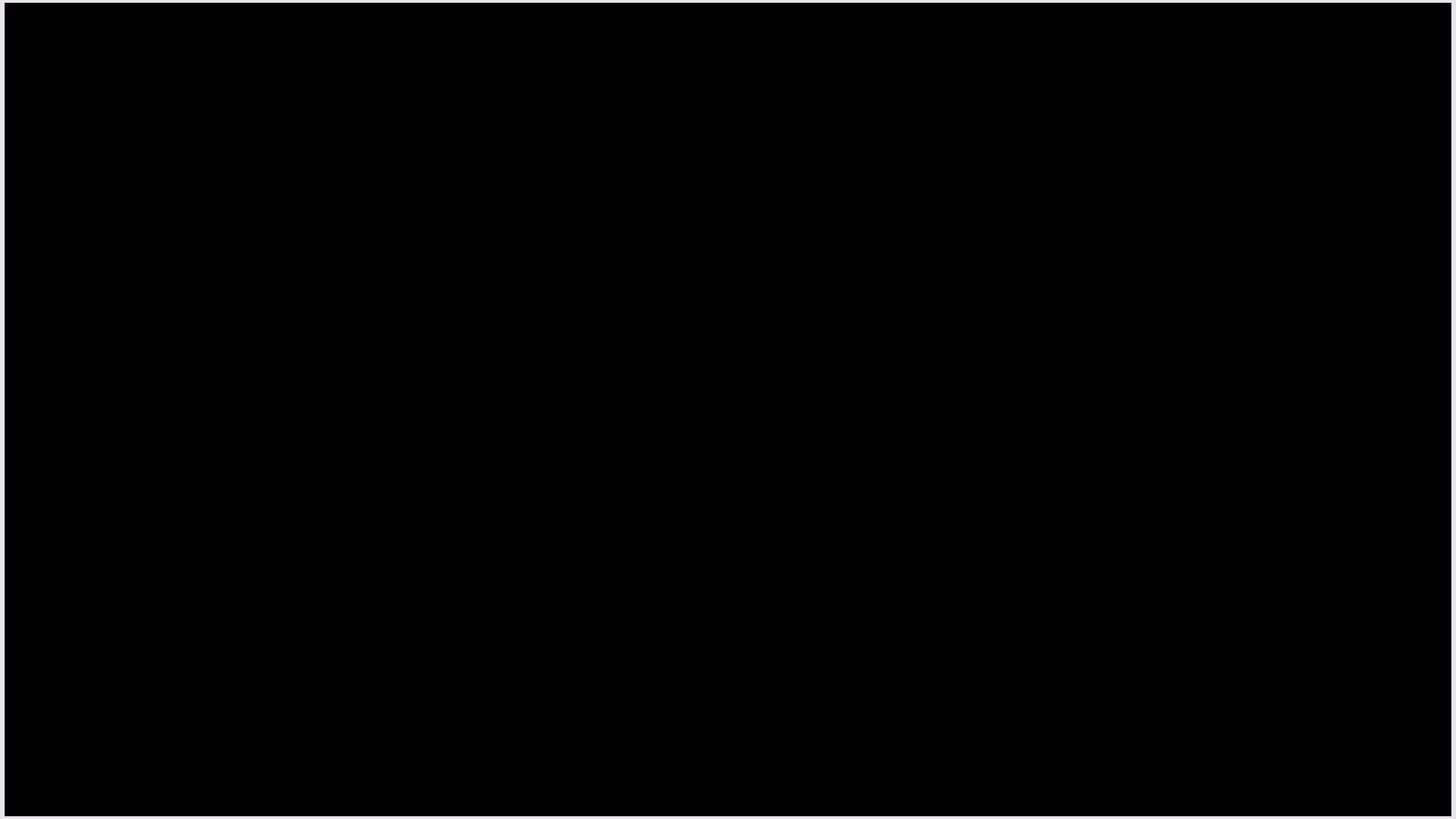


- Actividad: Responder en tu cuaderno

a. Dar 5 ejemplos de números racionales escribiéndolos como cociente entre dos numero enteros

b. ¿Por qué en la definición de numero racional el denominador debe ser distinto de cero?

Analicemos el siguiente video…



¿Todos los números se podrán escribir como fracción?

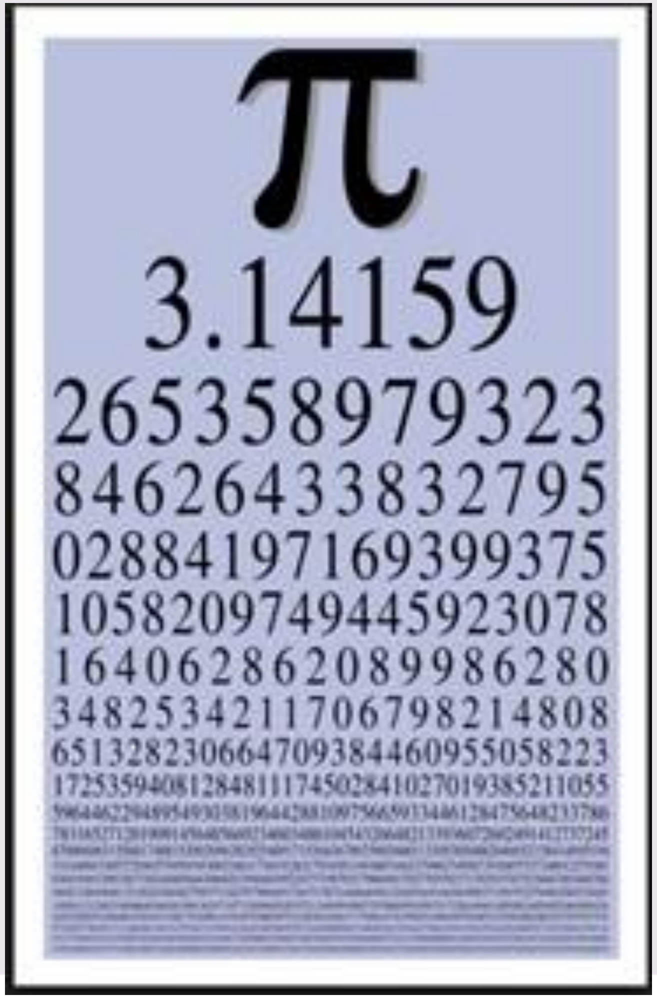
- El número $\pi = 3{,}1415926\ldots$ es un número decimal infinito, el cual no se puede escribir como fracción
- Las raíces cuadradas inexactas son números decimales infinitos por lo tanto tampoco se pueden escribir como fracción
  - $\sqrt{2} = 1{,}4142213\ldots$
  - $\sqrt{3}$
  - $\sqrt{5}$
  - Etc
- Existen muchos otros números que no se pueden escribir como fracción por lo tanto no pertenecen a este nuevo conjunto.

Actividad : Completa con “pertenece” o “no pertenece” según corresponda.

Número	Naturales	Enteros	Racionales	Tipo de racional
$-1,5$				
$1,3$				
$2,333333\ldots.$				
$-\frac{3}{5}$				
2,78413456789…				
0,254445				
$0,\overline{1}$				

Fracciones y números decimales

- Como ya aprendimos, existen números decimales que no se pueden escribir como fracción por lo tanto no pertenecen el conjunto de los números racionales
- Por ejemplo el numero pi, tiene infinitas cifras decimales y no sigue ningún patrón.
- Pero los tipos de números decimales que si se pueden representar como fracción son:
  - Decimal finito
  - Decimal infinito periódico
  - Decimal infinito semiperiódico.



Número decimal finito

- Un número decimal exacto o finito es el que se obtiene de una fracción (que tiene en el denominador una potencia de 10) o una simplificación de ellas.

Ejemplos:

- $\frac{3}{100} = 0{,}003$ $\qquad$ $\frac{25}{100} = 0{,}25$ $\qquad$ $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Número decimal infinito periódico

- Cuando el cociente se repite indefinidamente hablamos de un número decimal infinito y la parte en que se repite la identificamos como período.

- Ejemplo:
- $\frac{13}{6} = 2{,}166666666\ldots = 2{,}1\overline{6}$
- $\frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots = 0{,}\overline{45}$

Número decimal infinito periódico

- Un decimal infinito es periódico, si su período comienza inmediatamente después de la coma

Ejemplo

$$0{,}333333\ldots = 0{,}\overline{3}$$

periodo

Número decimal infinito semiperiódico

- Un decimal infinito es semiperiódico si el periodo no empieza inmediatamente después de la coma:

Ejemplo

$$0,1666666\ldots = 0,1\overline{6}$$

anteperiodo

periodo

Transformar un número decimal finito a fracción

- Para transformar un decimal finito a fracción, se multiplica y divide (Amplifica) el decimal por una potencia de 10 que tenga igual cantidad de ceros como dígitos tenga la parte decimal del número
- Ejemplo

$$0,23 = \frac{0,23 \cdot 100}{100} = \frac{23}{100}$$

Transformar un número decimal infinito periódico a fracción

- Se debe considerar que el numerador estará formado por todo el número sin la coma menos todo lo que esta antes de período
- El denominador estará formado por tantos nueves como cifras periódicas tenga el numero decimal.
- Ejemplo:

$$2,\overline{23} \rightarrow \frac{223-2}{99} \rightarrow \frac{221}{99}$$

Transformar un número decimal infinito semiperiódico a fracción

- Se debe considerar que el numerador estará formado por todo el número sin la coma menos todo lo que esta antes de período
- El denominador estará formado por tantos nueves como cifras periódicas tenga el numero decimal y tantos ceros como cifras semiperiodicas haya.
- Ejemplo:

$$2{,}3\overline{4} \rightarrow \frac{234-23}{90} \rightarrow \frac{211}{90}$$

Actividad: Transforma a fracción los siguientes números decimales

- $1.\ 0{,}25 =$
- $2.\ 1{,}6 =$
- $3.\ 0{,}\overline{15} =$
- $4.\ 1{,}\overline{9} =$
- $5.\ 0{,}1\overline{2} =$
- $6.\ 2{,}3\overline{1} =$

Recordemos: Suma y resta de fracciones

- **Cuando los denominadores son diferentes**, transformamos las fracciones para que tengan el mismo denominador. Para esto, se utiliza el **mínimo común múltiplo** (mcm) de los denominadores, es decir el número más pequeño múltiplo de los denominadores. Luego, el mcm se divide por cada denominador y el resultado multiplica a su numerador correspondiente.

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{4}$$

El M.C.M entre 5 y 4 es 20

Por otro lado, se divide 20 entre 5 y el resultado multiplica al numerador 1. Se divide 20 entre 4 y se multiplica al numerador 3

$$\frac{4 + 15}{20}$$

Así el resultado es

$$\frac{19}{20}$$

En el caso de resta se realiza el mismo procedimiento.

Recordemos: Multiplicación de fracciones

- En la multiplicación de fracciones, se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20}$$

Recordemos: División de fracciones

- Cuando queremos dividir dos fracciones, dejamos la primera fracción igual, invertimos el numerador y el denominador de la segunda fracción y luego se multiplican entre si las fracciones.

$$\boxed{\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}}$$

Algunas características de los números racionales que ya conoces

Tipos de fracciones:

Fracción propia, donde el numerador es menor que el denominador.

Fracción impropia, donde el numerador es mayor que el denominador.

Fracción Mixta, está compuesta de una parte entera y de otra fraccionaria.

Amplificar una fracción, significa multiplicar, tanto el numerador como el denominador por un mismo número.

Ejemplo: Amplificaremos la fracción $\frac{2}{3}$ por 6

$$\frac{2\cdot}{3\cdot}\frac{6}{6} = \frac{12}{18}$$

Simplificar una fracción, significa dividir, tanto el numerador como el denominador por un mismo número.

Ejemplo: Simplificaremos la fracción $\frac{27}{45}$

$$\frac{27 :}{45 :}\frac{3}{3} = \frac{9}{15}$$

Al amplificar o simplificar una fracción obtenemos fracciones equivalentes

Operatoria con números Racionales

- ¿Como resolverías este ejercicio?

$$\frac{1}{2} - 0,\overline{3}$$

Intenta resolverlo en tu cuaderno

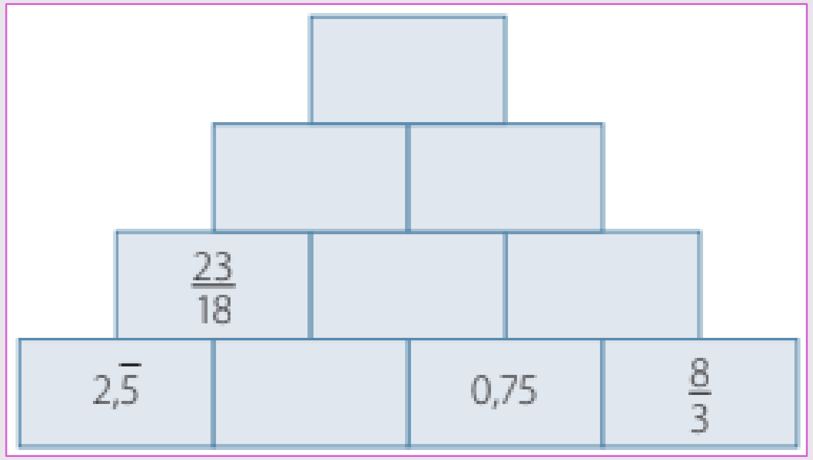
Actividad: Determina los valores de A, B, C, D, E, G, H según corresponda

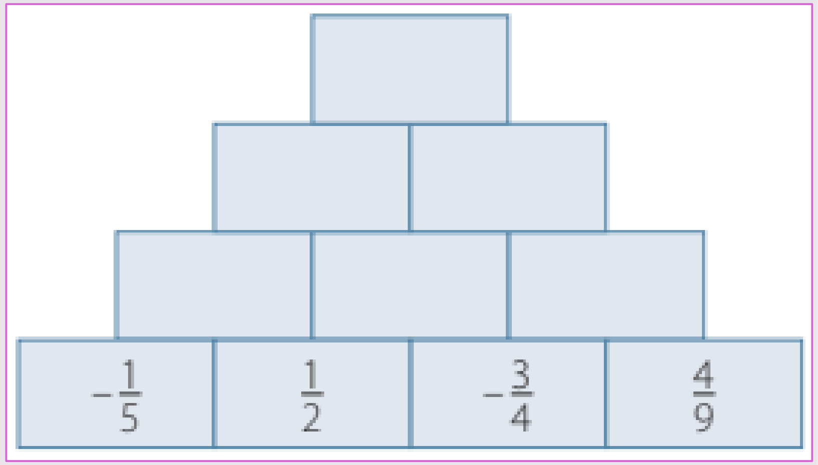
0,4	+	A	=	$\frac{9}{10}$
−		−		−
B	+	C	=	$\frac{3}{15}$
=		=		=
$\frac{3}{5}$	+	0,1	=	D

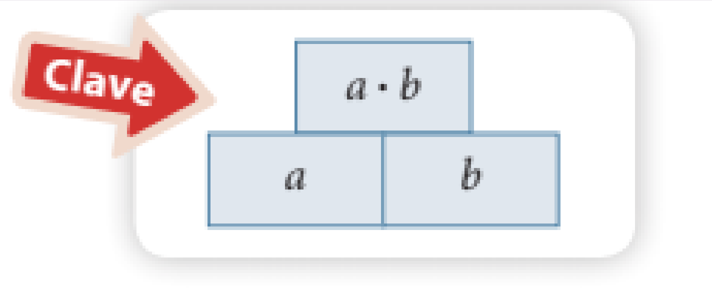
$-0,\overline{3}$	+	E	=	$\frac{13}{60}$
+		−		−
F	+	0,725	=	H
=		=		=
$-\frac{1}{3}$	+	G	=	$-\frac{61}{120}$

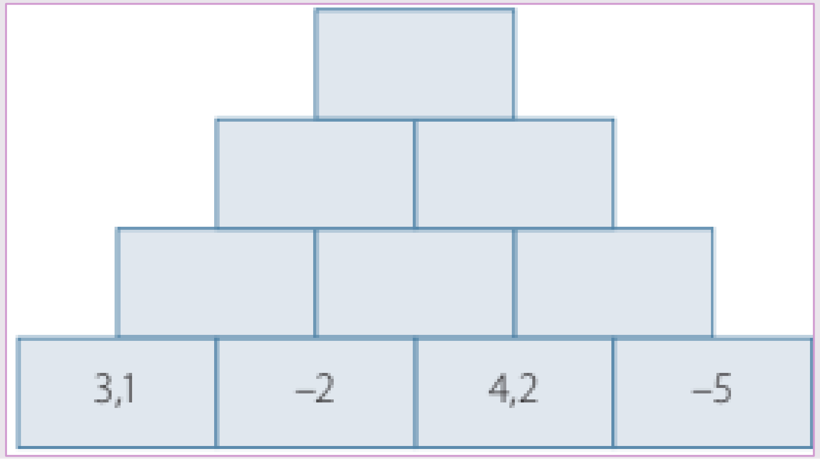
a) ¿Cuál es el valor de A+B-C+D?
b) ¿Cuál es el valor de E-G-F+H?

Actividad: Completa cada representación según la clave dada









Propiedades de los números racionales

- Como ya sabemos, los números enteros son un subconjunto de los números racionales, por lo cual absorben todas sus propiedades para la suma y producto. Y agregaremos una propiedad nueva del inverso multiplicativo.
- Estas son:
  - Propiedad de clausura
  - Propiedad conmutativa
  - Propiedad asociativa
  - Propiedad del neutro aditivo/multiplicativo
  - Propiedad del inverso aditivo/multiplicativo
  - Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición

Propiedad de clausura

Si sumamos dos números racionales el resultado es un número racional
Ejemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

$\frac{1}{2}\ y\frac{1}{3}$ son números racionales y al sumarlos su resultado $\frac{5}{6}$ también es un número racional

Si multiplicamos dos números racionales el resultado es un número racional
Ejemplo:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$$

$\frac{1}{2}\ y\frac{1}{3}$ son números racionales y al multiplicarlos su resultado $\frac{1}{6}$ también es un número racional

Propiedad conmutativa

El orden de los sumandos no altera la suma. Ejemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{3+2}{6}=\frac{2+3}{6}$$

$$\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$$

El orden de los factores no altera el producto. Ejemplo:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{1\cdot 1}{3\cdot 2}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

Propiedad asociativa

Podemos asociar dos o mas sumandos y no se alterará la suma. Ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$$
$$\left(\frac{3+2}{6}\right)+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\left(\frac{3+1}{6}\right)$$
$$\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{4}{6}$$
$$\frac{6}{6}=\frac{2+4}{6}$$
$$\frac{6}{6}=\frac{6}{6}$$
$$1=1$$

Podemos asociar dos o mas factores y no se alterará el producto. Ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\right)$$
$$\left(\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1\cdot 1}{2\cdot 6}\right)$$
$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{12}$$
$$\frac{1\cdot 1}{6\cdot 6}=\frac{1\cdot 1}{3\cdot 12}$$
$$\frac{1}{36}=\frac{1}{36}$$

Propiedad Del elemento neutro

El 0 es el elemento neutro aditivo en los números racionales. Ejemplo:

$$\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}+\frac{0}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

El 1 es el elemento neutro multiplicativo en los números racionales. Ejemplo:

$$\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}$$

Propiedad del elemento inverso

Todo número racional tiene su opuesto o inverso aditivo (un número que al sumarse dé como resultado el neutro aditivo. Ese inverso aditivo es el mismo numero con signo contrario Ejemplo:

$$\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1+(-1)}{2}=\frac{0}{2}=0$$

Todo número racional tiene inverso multiplicativo (un número que al multiplicarse dé como resultado el neutro multiplicativo. Ese inverso multiplicativo es el mismo numero “invertido” Ejemplo:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{2\cdot 3}{3\cdot 2}=\frac{6}{6}=1$$

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a adición

Esta propiedad nos indica que multiplicar una suma por un número da el mismo resultado que multiplicar cada sumando por el número y después sumar todos los productos. Ejemplo:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5+6}{15}\right) = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 5}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{11}{15}\right) = \frac{1}{6} + \frac{2}{10}$$

$$\frac{1 \cdot 11}{2 \cdot 15} = \frac{1}{6} + \frac{2}{10}$$

$$\frac{11}{30} = \frac{10+12}{60}$$

$$\frac{11}{30} = \frac{22}{60}$$

$$\frac{11}{30} = \frac{11}{30}$$

Resumen: Propiedades de los números racionales

En el conjunto $\mathbb{Q}$, para la **adición** y **multiplicación** se cumplen las siguientes **propiedades**:

- **Clausura:** Si $a, b \in \mathbb{Q}$ entonces $(a + b) \in \mathbb{Q}$ y $(a \cdot b) \in \mathbb{Q}$.
- **Conmutativa:** Si $a, b \in \mathbb{Q}$ entonces $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$.
- **Asociativa:** Si $a, b, c \in \mathbb{Q}$ entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- **Elemento neutro:** Para todo $a \in \mathbb{Q}$ existe un único elemento neutro, tal que:

Neutro aditivo	**Neutro multiplicativo**
$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

- **Elemento inverso:** Para todo $a \in \mathbb{Q}$ existe:

Inverso aditivo	**Inverso multiplicativo**
$-a \in \mathbb{Q}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$	$\frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$ $(a \neq 0)$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

- **Distributiva:** Si $a, b, c \in \mathbb{Q}$ entonces $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Actividad

- Escribir un ejemplo de cada una de las propiedades vistas con números racionales

Suma:
- Clausura
- Conmutativa
- Asociativa
- Elemento neutro
- Elemento inverso

Multiplicación:
- Clausura
- Conmutativa
- Asociativa
- Elemento neutro
- Elemento inverso

Distributividad de la multiplicación con respecto a la adición

Repaso: Operaciones con números racionales

- Para resolver ejercicios con números racionales siempre es necesario transformar todo a fracción.
- No olvidar la prioridad de operaciones que hemos trabajado hasta ahora.

Actividad: Completa la siguiente tabla

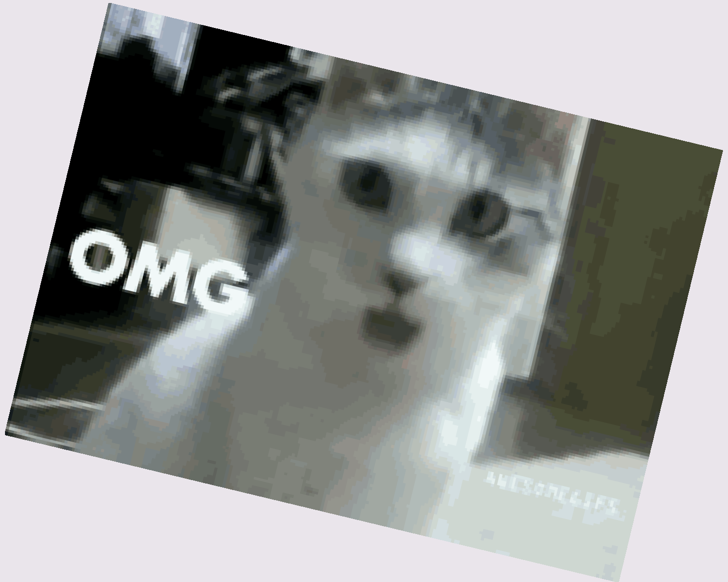
a	b	c	$(a - b \cdot [c + a])$	$([a - b] \cdot [c + a])$
0,15	$\frac{5}{7}$	0,1		
$\frac{4}{3}$	$-1,\overline{5}$	0,001		
$0,\overline{14}$	$1\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{5}$		

Actividad:

- Resolver la guía [guia numeros racionales 1.docx]
- Para esto apóyate de los apuntes de esta presentación

¿Cómo resolverías el siguiente ejercicio?

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}}$$



Operatoria de fracciones complejas y continuas

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}}$$

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{2-1}{2}}}$$

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{1}{2}}}$$

$$1-\cfrac{1}{1-1\cdot\cfrac{2}{1}}$$

$$1-\frac{1}{1-2}$$

$$1-\frac{1}{-1}$$

$$1-(-1)$$

Resultado

$$1+1=2$$

Actividad: Resolver los siguientes ejercicios

1) $\dfrac{\frac{3}{1}}{2} =$

2) $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} =$

3) $\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}} =$

4) $\dfrac{-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{4}} =$

5) $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{3}{6}}{\frac{1}{5}+\frac{6}{15}} =$

6) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{1-\frac{1}{4}} =$

Actividades

Resuelve la guía de trabajo guia numeros racionales 2.docx

Apóyate del ejemplo entregado para resolver los ejercicios planteados

Actividad complementaria: Apliquemos lo que hemos aprendido hasta ahora mediante la siguiente guía de trabajo guia numeros racionales 3.docx

Reflexión sobre mis aprendizajes: guia numeros racionales 4.docx

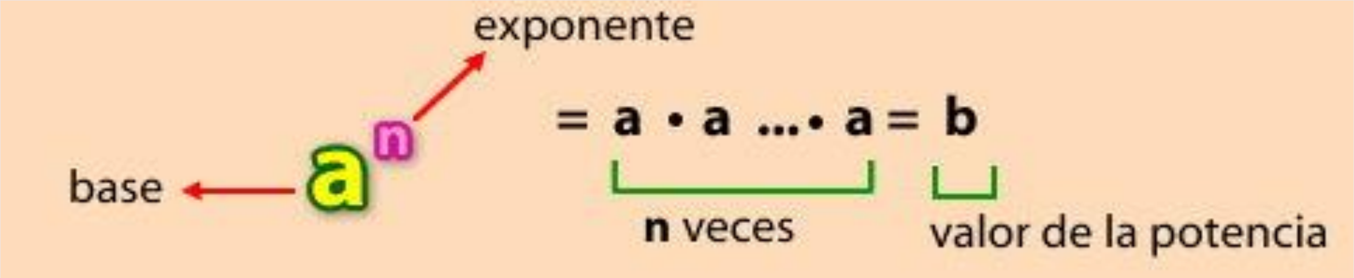
2.POTENCIAS

Recordemos un poco de potencias

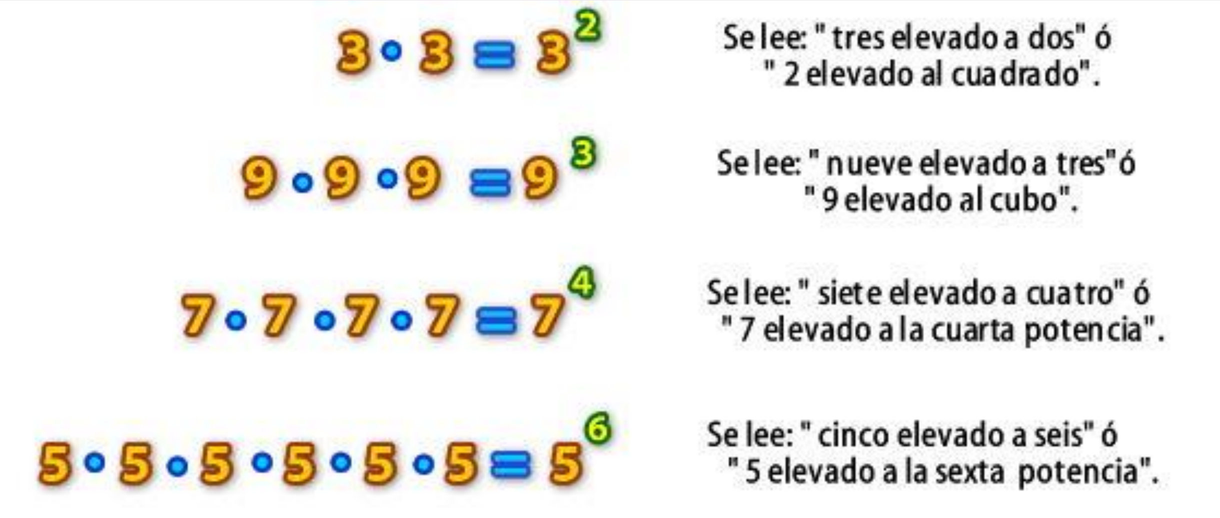
- Una potencia es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales. En ella se reconocen la **base y el exponente**.
- Ejemplo:

- La **base** corresponde al factor que se repite; el **exponente** indica cuántas veces debe repetirse dicho factor.

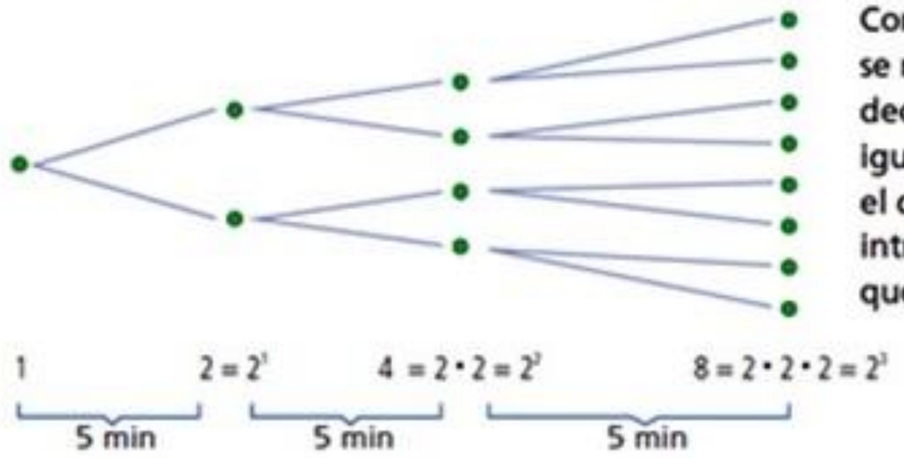
- El valor de la potencia es el producto total que se obtiene al multiplicar la base por sí misma tantas veces como lo indica el exponente, es decir:



- Ejemplos:



Actividad:



Como se mencionó antes, las bacterias se reproducen por bipartición, esto quiere decir que una bacteria se divide en dos iguales en un tiempo determinado. Observa el diagrama que muestra lo que ocurre si se introduce en un tubo de ensayo una bacteria que se divide en dos cada 5 minutos.

PARA DISCUTIR

- ¿Cuántas bacterias hay a los veinte minutos?, ¿y a los veinticinco minutos?
- ¿Cuántas veces debe dividirse una bacteria para que el tubo tenga 128 organismos?
- ¿A qué potencia de 2 corresponde ese número?
- ¿Cuánto tiempo pasa desde que se introduce una bacteria en el tubo hasta que tenga 128 organismos?

Algunas propiedades de potencias

1. Si la **base de una potencia es 1**, el valor de la potencia para cualquier exponente es 1. Ejemplo: $1^{12} = 1$
2. Si el **exponente de una potencia es 1**, el valor de la potencia es igual a la base. Ejemplo: $3^1 = 3$
3. Si el **exponente de una potencia es 0** y la **base es distinta de cero**, el valor de la potencia es 1. Si es cero este valor no existe. Ejemplo: $3^0 = 1;\ 25^0 = 1$
4. Si la **base de la potencia es cero (0)**, entonces, el resultado, para cualquier exponente natural, es siempre 0. Ejemplo: $0^3 = 0$
5. Si la **base de una potencia es par**, el valor de la potencia, para cualquier exponente, es **par.** Ejemplo: $2^5 = 32$
6. Si la **base de una potencia es impar**, el valor de la potencia, para cualquier exponente, es **impar.** Ejemplo: $3^3 = 27$

Propiedades de la multiplicación y división de potencias

Para todo $m,n \in Z$ y $a \neq 0$; $b \neq 0$ se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} a^m \cdot a^n = a^{n+m} \\ a^m : a^n = a^{m-n} \end{array}\right\} \text{bases iguales}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \\ a^m : b^m = (a:b)^m \end{array}\right\} \text{exponentes iguales}$$

- $(a^m)^n = a^{n \cdot m}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^0 = 1$

Potencias de 10

Como ya hemos dicho en una potencia, el **exponente** indica la cantidad de veces que la base se multiplica por sí misma.

Si la base de la potencia es 10 y el exponente es positivo, el valor de la potencia queda expresado con la cantidad de ceros que indica el exponente.

- Ejemplo:

$$10^3 = 1000$$
$$10^5 = 100000$$

*El exponente coincide con el número de ceros

- Si la base es 10 y el exponente es negativo, el valor de la potencia queda expresado con tantas cifras decimales como indica el valor absoluto del exponente.
- Ejemplo:

$$10^{-3} = 0{,}001$$
$$10^{-5} = 0{,}00001$$

¿Cómo expresar un número como potencia de base 10?

- Para escribir un número como potencia de base 10 debes hacer lo siguiente:

- $400000 = 4 \cdot 100000 = 4 \cdot 10^5$
- $91000 = 91 \cdot 1000 = 91 \cdot 10^3$
- $5670000 = 567 \cdot 10000 = 567 \cdot 10^4$

Potencias de base entero y exponente natural

Completa la tabla

Potencia	Multiplicación iterada	Resultado	¿Exponente par o impar?	Signo del resultado
$(-2)^5$				
$(-2)^6$				
$(-3)^4$				
$(-3)^5$				
$(-1)^7$				
$(-1)^8$				

Al igual que las potencias que tienen como base un número natural, las potencias que tienen como base un número entero negativo y exponente natural se pueden considerar como una multiplicación iterada

¿Qué signo tiene el resultado de una potencia cuya base es un número negativo?¿Depende del exponente?

- Una potencia cuya base es un número entero negativo dará como resultado un número positivo si el exponente y dará como resultado un número negativo si el exponente es impar
- Al representar simbólicamente esta relación, se tiene que. Si $a \in \mathbb{Z}\, y\, n \in \mathbb{N}$ se cumple que
  - Si n es par entonces $a^n > 0$
  - Si n es impar entonces $a^n < 0$
- Ejemplos
- $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$
- $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

Aquí es necesario recordar la "ley de signos" de la multiplicación

Nota: $-2^3 \neq (-2)^3$ ya que en el primer caso el signo no esta incluido en la potencia.
Actividad: Demostrar esta desigualdad resolviendo cada uno de los lados.

¿Qué pasa si el exponente es negativo?

- Veamos el siguiente ejemplo y observa detalladamente el procedimiento

¿Cuánto es el valor de 2^{-3}?

$2^{-3} \rightarrow 2^{0-3} \rightarrow \frac{2^0}{2^3} \rightarrow \frac{1}{2^3} \rightarrow \frac{1}{8}$

¿Puedes explicar el procedimiento utilizado con tus palabras?
¿Se utilizó alguna propiedad de potencia? Explica cuáles

Resuelve las paginas 42 y 43 de tu texto del estudiante

Potencias de base racional y exponente natural

- Potencia de una fracción: En este caso la base es un número racional y el exponente un numero natural.

Generalizando:

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$; la potencia de base $\frac{a}{b}$ y exponente n con $n \in \mathbb{N}$; se define como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{\text{n veces}}$$

Como un número racional se puede representar como el cociente de dos números enteros, en el caso de una potencia de base racional, se tiene que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos: Calcular las siguientes potencias

- $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2} = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$
- $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$
- $\left(\frac{3}{8}\right)^2$
- $-\left(\frac{2}{3}\right)^4$
- $\left(\frac{5}{7}\right)^3$
- $\left(\frac{1}{5}\right)^3$
- $\left(-\frac{4}{9}\right)^2$

Escribir como multiplicación iterada y luego aplicando la definición de potencias de base racional como se muestra en el primer ejercicio a modo de ejemplo

Propiedades de potencias en Q

1. Todo número racional elevado a 0 es igual a la unidad.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

2. Todo número racional elevado a 1 es igual a sí mismo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$

3. Producto de potencias con la misma base es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

4. Producto de potencias con el mismo exponente es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el producto de las bases

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)^n$$

5. Cociente de potencias con la misma base es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la diferenci

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

6. Cociente de potencias con el mismo exponente es otra potencia con el mismo exponente y cuya base e

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a \cdot d}{b \cdot c}\right)^n$$

- 7. Potencia de una potencia es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes.

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right]^{m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$$

- 8. Potencia de un número con exponente negativo es la potencia positiva del inverso multiplicativo de ese número

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

- Actividad: Demostrar cada una de las 8 propiedades antes mencionadas, mediante un ejemplo, considerando que cada base debe ser racional y su exponente entero

Ejercita con las páginas 48 y 49 del texto del estudiante ☺

Ejercicios resueltos: Reducir las siguientes potencias aplicando propiedades

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} \bullet \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2+3} = \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$\left(\frac{9}{7}\right)^4 \div \left(\frac{9}{7}\right)^{-2} = \frac{9}{7}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{9}{7} \bullet \frac{9}{7}\cdot\frac{9}{7} = \left(\frac{9}{7}\right)^{4-2} = \left(\frac{9}{7}\right)^2$$

$$(0{,}5)^2 \cdot (0{,}5)^1 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \bullet 0{,}5 = (0{,}5)^{2+1} = (0{,}5)^3 = \left(\frac{5}{10}\right)^3$$

$$(2{,}\overline{3})^5 \div (2{,}\overline{3})^1 = 2{,}\overline{3}\cdot 2{,}\overline{3}\cdot 2{,}\overline{3}\cdot 2{,}\overline{3}\cdot 2{,}3 \bullet 2{,}\overline{3} = (2{,}\overline{3})^{5-1} = (2{,}\overline{3})^4 = \left(\frac{21}{9}\right)^4$$

Ejercicios propuestos

- Según los ejemplos anteriores y con ayuda de tus apuntes resuelve la siguiente guía de ejercicios guia potencias 1.docx

Operatoria combinada con números racionales y potencias

◦ Recordemos la prioridad de operaciones en ejercicios combinados.

Ejemplo:

$$\left[\left(2-1\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(7\frac{1}{2}\right)^3\right]:\left(5-\frac{6}{5}\right)= \left[\left(2-\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{20-24}{32}\right)-\left(\frac{6}{15}\right)^4\cdot\left(\frac{15}{2}\right)^3\right]:\left(\frac{25-6}{5}\right)=$$

$$\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{-4}{32}\right)-\left(\frac{6}{15}\right)^4\cdot\left(\frac{15}{2}\right)^3\right]:\left(\frac{19}{5}\right)= \left[\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{-1}{8}\right)-\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{15}{2}\right)^3\right]:\left(\frac{19}{5}\right)=$$

$$\left[\frac{4}{25}+\left(\frac{-1}{8}\right)-\frac{16}{625}\cdot\frac{3375}{4}\right]:\left(\frac{19}{5}\right)= \left[\frac{4}{25}+\left(\frac{-1}{8}\right)-\frac{54000}{2500}\right]:\left(\frac{19}{5}\right)= \left[\frac{4}{25}+\left(\frac{-1}{8}\right)-\frac{108}{5}\right]:\left(\frac{19}{5}\right)=$$

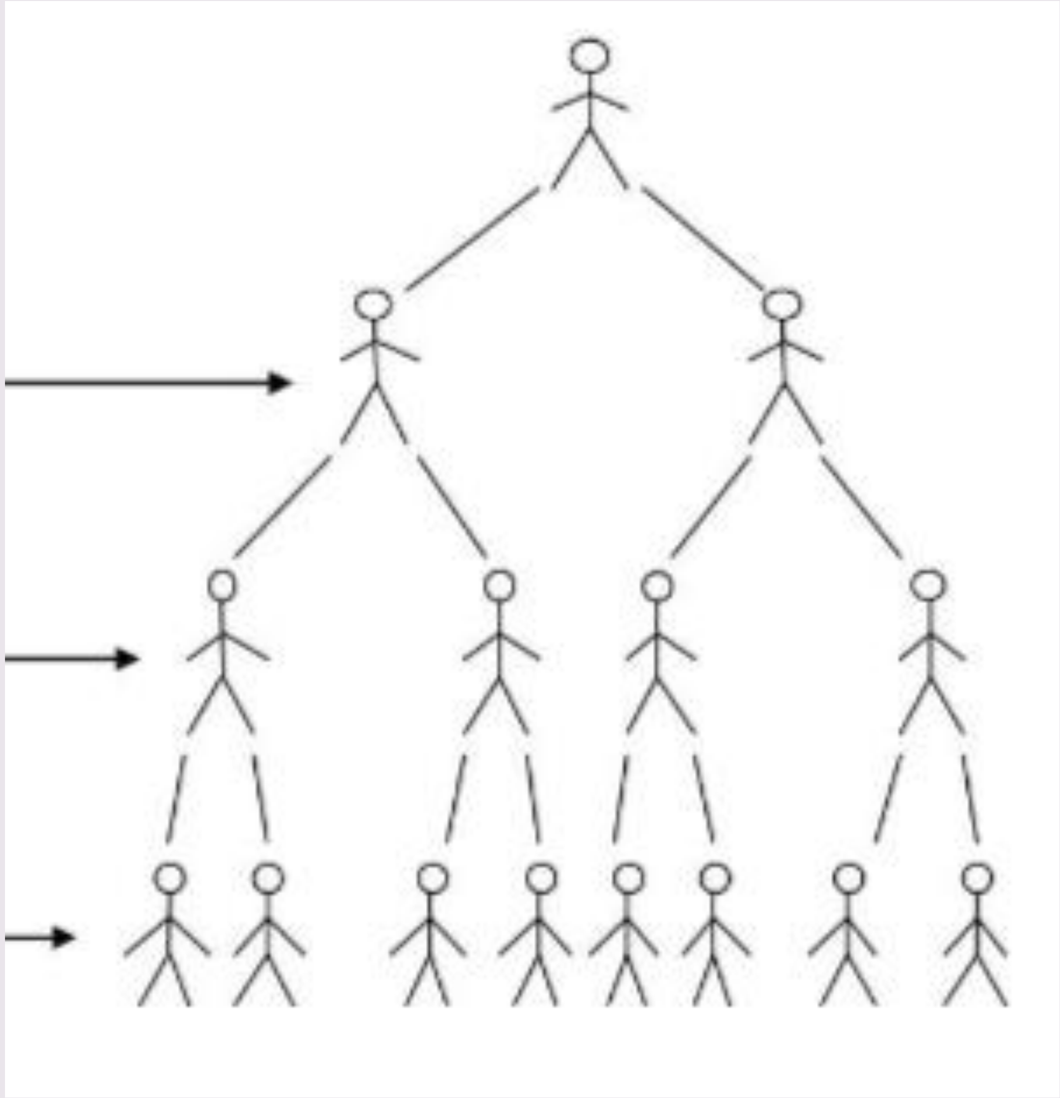
$$\left[\frac{32-25}{200}-\frac{108}{5}\right]:\left(\frac{19}{5}\right)= \left[\frac{7}{200}-\frac{108}{5}\right]:\left(\frac{19}{5}\right)= \left[\frac{35-4320}{200}\right]:\left(\frac{19}{5}\right)= \left[\frac{-4285}{200}\right]:\left(\frac{19}{5}\right)= \left[-\frac{857}{40}\right]\cdot\left(\frac{5}{19}\right)=-\frac{4285}{760}=-\frac{857}{152}$$

Desafío: Resuelve el siguiente ejercicio con números racionales

$$\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^{2}\right]:\left[\left(\frac{1}{2}-1\right):2\frac{1}{2}\right]=$$

Crecimiento exponencial

- Un crecimiento exponencial se presenta por una potencia de exponente variable, es decir, una expresión algebraica de la forma a^x donde x generalmente representa el tiempo y cuya base "a" es un número mayor que uno, que se elige dependiendo de la situación que represente.
- El cociente entre los valores obtenidos para dos exponentes consecutivos es constante.
- Ejemplo: Una enfermedad se ha propagado rápidamente en los últimos meses. Cada mes se duplica la cantidad de contagiados del mes anterior. El siguiente diagrama de árbol refleja esta situación



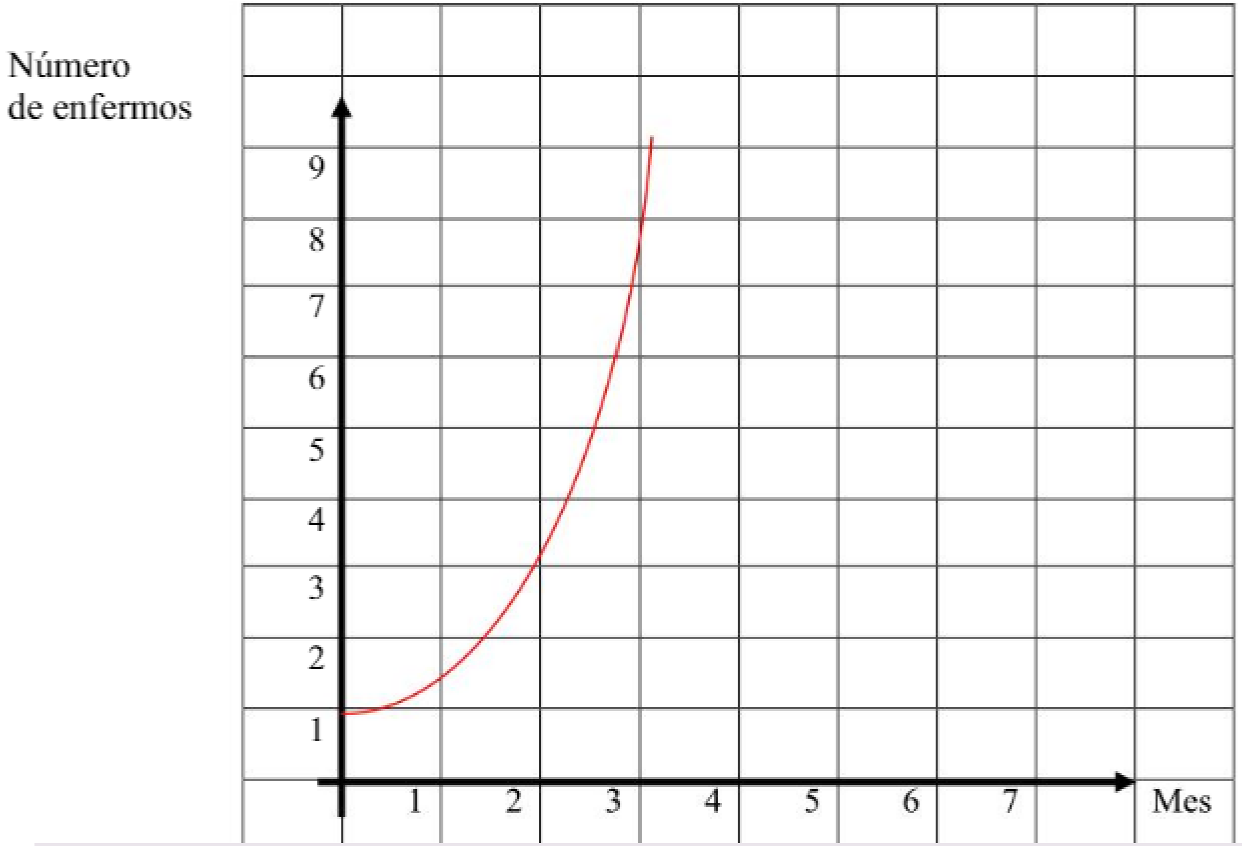
Mes 1º

Mes 2º

Mes 3º

- La siguiente tabla y grafico describen la situación anterior

Mes	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N° de enfermos	1	2	4	8	16	32	64	128	256
Potencia	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8



Como se observa, a medida que aumenta la cantidad de meses, aumenta cada vez más rápido el número de enfermos. Este crecimiento representado mediante potencias se conoce como crecimiento exponencial

En este ejemplo el cociente de los valores obtenidos para los meses 3 y 4 es igual al cociente correspondiente a los meses 4 y 5
Por lo tanto la cantidad de enfermos se duplica en cada periodo de tiempo

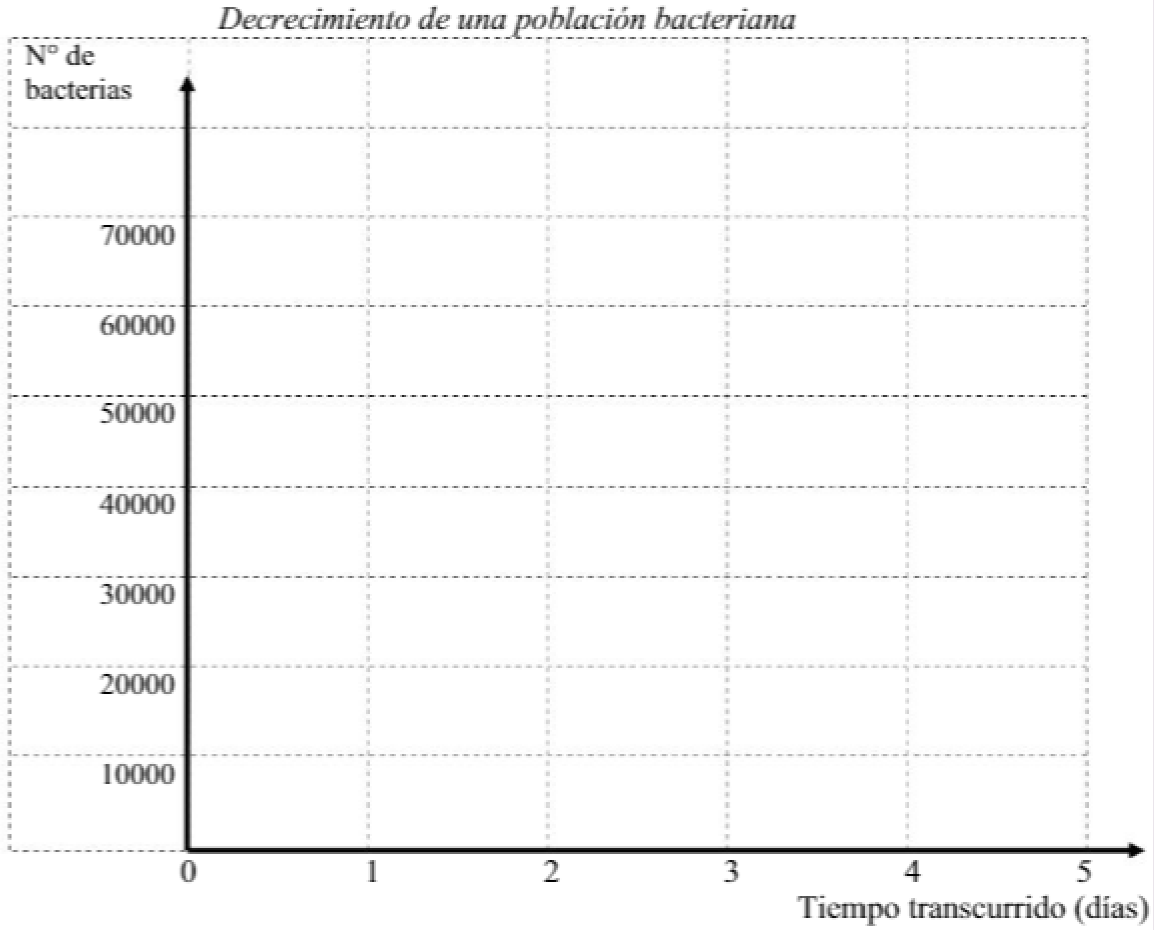
Resolver los ejercicios apoyándote de este ejemplo: guia crecimiento exponencial 1.docx

Decrecimiento exponencial

- Un decrecimiento exponencial se representa mediante una potencia de exponente variable, es decir una expresión de la forma a^x donde, a diferencia del crecimiento exponencial, la base a es un número menor que 1, que se escoge dependiendo de la situación que represente.
- El cociente entre dos valores correspondientes a tiempos consecutivos es constante
- Ejemplo: Las bacterias crecen exponencialmente, lo que les permite colonizar rápidamente un cierto medio, normalmente vacío. Luego de alcanzar grandes reducciones en su numero e incluso en la extinción total debido, por ejemplo, a la falta de alimento o a la acumulación de residuos tóxicos. La disminución del número de bacterias producto de la sobrepoblación también puede ser exponencial, pero como una potencia de base fraccionaria menor que 1.

- Considera un grupo de 65536 bacterias que decrecen exponencialmente a un cuarto de su población cada dia. La siguiente tabla relaciona los días transcurridos y la cantidad de bacterias

Días transcurridos	Factor de crecimiento	Cantidad de bacterias
0	–	– 65.536 = 65.536
1	–	– 65.536 = 16.384
2	–	– 65.536 = 4.096
3	–	– 65.536 = 1.024
4	–	– 65.536 = 256
5	–	– 65.536 = 64



Si divides el numero de bacterias de 1 día por el numero de bacterias del día anterior obtendrás en todos los casos 0,25

Ejercicio: Responde de acuerdo al problema anterior

1. ¿Qué día quedan 16 bacterias?
2. ¿En qué momento la población se puede considerar extinta?
3. ¿Cuántas bacterias han muerto al primer día?
4. ¿Cuántas bacterias han muerto al tercer día?
5. ¿Qué día mueren 3072 bacterias?

Completa la actividad [guia decrecimiento exponencial 1.docx]

Resumen Crecimiento y decrecimiento exponencial

Cuando se modela una situación de **crecimiento exponencial**, la base de la potencia es mayor que 1.

Por otra parte, cuando la base de la potencia es menor que 1 y mayor que cero, se está modelando un **decrecimiento exponencial**.